UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

MIRDY ALVES SOUSA

Campina Grande - PB

Julho de 2019

MIRDY ALVES SOUSA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Campina Grande - PB

Julho de 2019

S725i Sousa, Mirdy Alves.
Uma introdução ao estudo de derivadas e algumas aplicações [manuscrito] / Mirdy Alves Sousa. - 2019.
46 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo , Departamento de Matemática - CCT."

1. Cálculo diferencial. 2. Derivadas. 3. Matemática. I. Título

21. ed. CDD 515.33

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

MIRDY ALVES SOUSA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 05 de julho de 2019:

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
Dpto.Matemática-CCT/UEPB
Orientador

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Dpto.Matemática-CCT/UEPB
Examinador

Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda
Dpto.Matemática-CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande - PB
Julho de 2019

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a minha família e meus professores, em especial a minha avó Iracy Cunha de Santana Pereira e minha mãe Maria José Alves Pereira.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela realização deste trabalho e por todas as bênçãos alcançadas durante todo esse percurso. Agradeço a minha família, professores e amigos pela ajuda e incentivos, principalmente a minha avó Iracy Cunha, que sempre esteve ao meu lado me apoiando em todos os momentos; aos professores Vandenberg Lopes Vieira, Victor Hugo Cavalcante Lima, José Ginaldo, Ernesto Trajano de Lima Filho, Nahum Isaque, Fernando Luiz e Emanuela Régia que de forma direta ou indireta contribuíram para uma formação acadêmica de qualidade; dentre os amigos cito Bruno Vasconcelos, Roberto Beto, Állisson Henrique, Newton Cesar, Karoline Marques, Nahara Morais, Tamires Moreira, Anna Carolina, Claudiana Maria, parceiros de estudo.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.”
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo introdutório sobre Derivadas, bem como alguns exemplos que mostram sua aplicabilidade. Inicialmente fazemos uma breve abordagem histórica sobre a origem do Cálculo Diferencial, buscando conhecer como o mesmo surgiu e se desenvolveu, posteriormente veremos a definição, processos de derivação e algumas aplicações.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial. Derivadas. EDO's. Aplicações.

Abstract

The objective of this work is to present an introductory study on Derivatives, as well as some examples that show its applicability. Initially we make a brief historical approach on the origin of the Differential Calculus, trying to find how it arose and developed, later we will see the definition, derivation processes and some applications.

Key-words: Differential Calculus. Derivatives. EDO's. Aplications.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A Derivada é uma ferramenta matemática de grande importância, sendo base para diversas disciplinas como Cálculo Integral, Funções de varias variáveis, Equações Diferenciais entre outras. Bem como para o desenvolvimento cientifico de diversas outras ciências.

Muitos alunos, em qualquer que seja o nível educacional questionam para que serve determinados assuntos e em que área são aplicados. À vista disto, o presente trabalho objetiva apresentar um estudo introdutório sobre derivadas, bem como alguns exemplos que mostram sua aplicabilidade.

O presente trabalho divide-se em Três capítulos:

(i) A Derivada: Onde é apresentado alguns aspectos históricos sobre a origem do cálculo Diferencial, um resumo teórico sobre derivadas, regras de derivação e suas propriedades.

(ii) Algumas Aplicações da Derivada: Este capítulo apresenta um dos objetivo deste trabalho que é fazer algumas aplicações em problemas de otimização.

(iii) Um Pouco de EDO: Onde é apresenado um resumo teórico sobre EDO’s lineares de primeira ordem e suas propriedades, além de algumas aplicações utilizando EDO’s.

1 A Derivada

Esse capítulo foi baseado em (FLEMMING; GONÇALVES, 2007), (LIMA, 2006).

1.1 Aspectos Históricos

Segundo relatos históricos, a matemática surgiu na babilônia, depois do ano 300a.C, da necessidade de contar objetos. desenvolvida por grandes matemáticos, com o passar dos anos tornou-se uma ciência sistematizada que, através da abstração, sintetiza ideias.

A origem e desenvolvimento do cálculo diferencial está intimamente ligada a problemas geométricos de retas tangentes. Desde a época dos gregos antigos já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto; Na realidade, essa ideia era muito imprecisa, necessitando de um tratamento mais rigoroso para a questão das retas tangentes.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver problemas como, por exemplo, Issac Barrow, Pierre Fermat, John Wallis, Issac Newton, Gottfried Leibniz.

O conceito de derivada surgiu apenas no século XVII, com o desenvolvimento da geometria analítica, devido a introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas. A construção deste conceito é o resultado de diversas contribuições e dedicação de inúmeros matemáticos; dentre os que mais contribuíram foram Newton e Leibniz.

1.2 Derivada de Funções Reais de Uma Variável Real

Inicialmente veremos que a derivada representa a inclinação de uma curva num determinado ponto. Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b). Sejam $A\,(x_1, y_1)$ e $B\,(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$. Seja r a reta secante que passa pelos pontos A e B. Considerando o triângulo retângulo ABC, temos que a inclinação ou coeficiente angular da reta r é

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

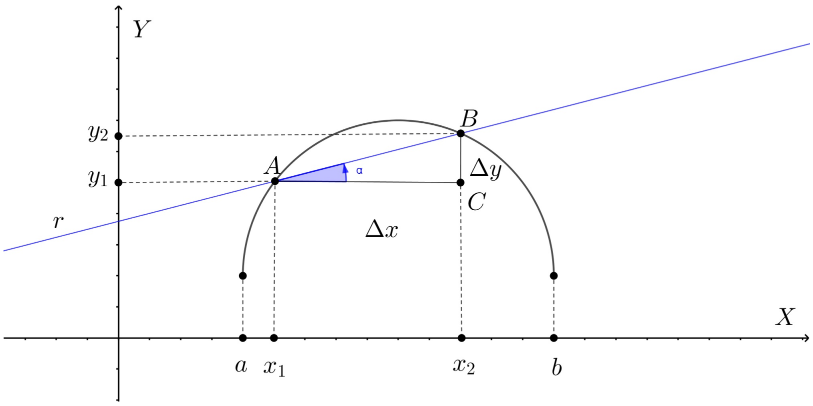

Figura 1 – Interpretação Geométrica da Derivada.

Se mantivermos A fixo, e movermos B sobre a curva em direção a A, a inclinação da reta secante r irá variar. À medida que B vai se aproximando cada vez mais de A, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante. Esse valor é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto A, ou coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto A.

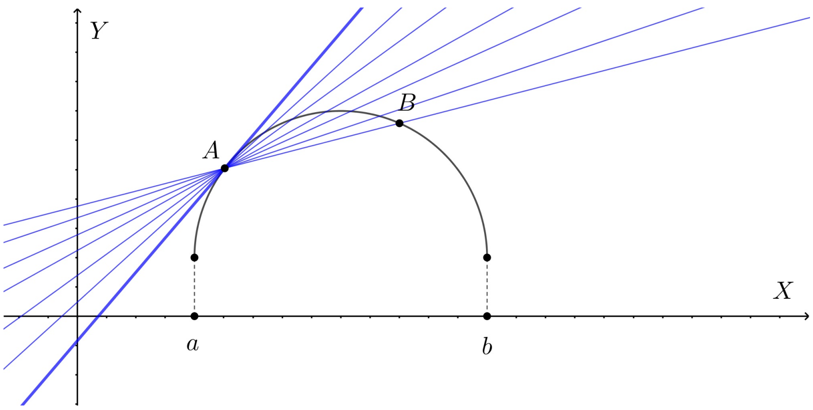

Figura 2 – Interpretação Geométrica da Derivada.

Definição 1.1. Dada uma curva $y = f(x)$, seja $A\,(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto A é dada por

$$m(x_1) = \lim_{B \to A} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.1}$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1.1) na seguinte forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1.2}$$

O quociente $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ é chamado quociente de diferenciação ou quociente de Newton.

Definição 1.2. Se a função $f(x)$ é contínua em $x_1,$então a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A(x_1, f(x_1))$ é:

(i) A reta que passa por A tendo inclinação $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite existe. Neste caso, temos a equação

$$y - f(x_1) = m(x - x_1) \tag{1.3}$$

Esta equação é chamada equação da reta tangente.

(ii) A reta $x = x_1$ se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

Exemplo 1.1. Determine:

(a) A inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

(b) A equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2.

(a) Solução:

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então $f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1$ e

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1 \\ &= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 \end{aligned}$$

Usando (1.2), temos

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\ &= 2x_1 - 2. \end{aligned}$$

Logo, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é $m(x_1) = 2x_1 - 2$

(b) Solução:

O ponto da curva cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

Vamos encontrar a inclinação da curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P(2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro, a inclinação da curva num ponto (x_1, y_1).

Temos,

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1 \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 4x_1. \end{aligned}$$

Como $m(x_1) = 4x_1$, então $m(2) = 4 \cdot 2 = 8$. Usando (1.3), escrevemos a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$. Temos,

$$\begin{gathered} y - f(x_1) = m(x - x_1) \\ y - 11 = 8(x - 2) \end{gathered}$$

ou ainda,

$$8x - y - 5 = 0.$$

Definição 1.3. A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, é definida pelo limite:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \tag{1.4}$$

quando este limite existe.

Pelo que já foi exposto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1, representa a inclinação da curva neste ponto.

Outras notações podem ser utilizadas para representar a derivada de $y = f(x)$:

(i) $D_x f(x)$

(ii) $D_x y(x)$

(iii) $\dfrac{dy}{dx}$

Exemplo 1.2. Determine:

(a) A derivada da função $f(x) = 1 - 4x^2$.

(b) A derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

(a) Solução:

Utilizando a definição 1.3, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4(x+\Delta x)^2 - 1 + 4x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4x^2 - 8x\Delta x - 4(\Delta x)^2 - 1 + 4x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-8x - 4\Delta x) \\
&= -8x
\end{aligned}$$

(b) Solução:

Utilizando a definição 1.3, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x+2} - \frac{1}{x+2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + 2 - x - \Delta x - 2}{(x+\Delta x+2)(x+2)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{-1}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right); \ \text{se}\, x \neq 0 \\ 0; \ \ \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

não é derivável em $x_0 = 0$.

Solução:

Utilizando a definição 1.3, temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

Como o limite não existe, logo, f não é derivável em $x = 0$.

Definição 1.4. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a. (Isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$). Equivalentemente: para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$. Indica-se com $X^{'}$ o conjunto dos pontos de acumulação de X. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real a é um ponto de acumulação à direita para X, e escreve-se $a \in X'_{+}$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a + \varepsilon) \neq \varnothing$. A fim de que $a \in X'_{+}$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X. Analogamente se define ponto de acumulação à esquerda. Por definição, $a \in X'_{-}$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $X \cap (a - \varepsilon, a) \neq \varnothing$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência cujos termos $x_n < a$ pertencem a X.

Teorema 1.1. *A fim de que $f : X \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X^{'}$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, onde $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f^{'}(a)$.*

Demonstração. Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y^{'}$. Supondo que $f^{'}(a)$ exista, definimos $r : Y \to \mathbb{R}$ pondo $r(h) = f(a+h) - f(a) - f^{'}(a) \cdot h$. Então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f^{'}(a),$$

Logo o $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. A condição é, portanto, necessária. Reciprocamente, se vale a condição, então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c$$

e, portanto,

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c \right] = \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

ou seja, $f^{'}(a)$ existe e é igual a c. ■

Corolário 1.1. Uma função é contínua nos pontos em que é diferenciável.

Demonstração. Com efeito, se f é derivável no ponto a então $f(a+h) = f(a) + f^{'}(a) \cdot h + \left[\frac{r(h)}{h}\right] h$ com $\lim_{h \to 0} \left[\frac{r(h)}{h}\right] = 0$, logo $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, ou seja, f é contínua no ponto a. ■

Teorema 1.2. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivavel à direita no ponto $a \in X \cap X^{'}_{+}$, com $f^{'}_{+}(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.*

Demonstração. Temos $\lim_{\to a^{+}} \dfrac{[f(x) - f(a)]}{(x-a)} = f^{'}_{+}(a) > 0$. Pela definição de limite à direita, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\, a < x < a + \delta \Rightarrow \frac{[f(x) - f(a)]}{(x-a)} > 0 \Rightarrow f(a) < f(x).$$

■

Teorema 1.3. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X^{'}_{-}$, com $f^{'}_{-}(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a - \delta < x < a$ implicam $f(a) > f(x)$.*

Demonstração. Temos $\lim_{x \to a^{-}} \dfrac{[f(x) - f(a)]}{(x-a)} = f^{'}_{-}(a) < 0$. Pela definição de limite à esquerda, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\, a - \delta < x < a \Rightarrow \frac{[f(x) - f(a)]}{(x-a)} < 0 \Rightarrow f(a) > f(x)$$

. ■

1.3 Regras de Derivação

Como vimos na seção anterior, a derivada de uma função é o limite do quociente de diferenciação, por definição. Observamos que a utilização da definição de derivada se torna um processo muito exaustivo devido a enorme quantidade de cálculos. As chamadas regras de derivação permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição. Para deduzir as regras de derivação, basta aplicarmos a definição.

Proposição 1.1 (Derivada de uma Constante)**.** *Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x pertencente ao domínio de f, então $f'(x) = 0$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2 (Regra da Potência)**.** *Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

Demonstração. Seja $f(x) = x^n$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

Expandindo $(x+\Delta x)^n$ pelo Binômio de Newton, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + ... + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + ... + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + ... + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right] \\ &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.4. Se $g(z) = z^7$ então $g'(z) = 7z^6$

Proposição 1.3 (Derivada do Produto de uma Constante por uma Função)**.** *Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\
&= c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= cf'(x).
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 1.5. Se $g(z) = -4z^7$ então $g'(z) = (-4)\cdot(z^7)' = -4(7)z^6 = -28z^6$.

Proposição 1.4 (Derivada de uma Soma)**.** *Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Temos:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}
$$

■

Observação 1.1. Repetindo indutivamente este argumento, mostra-se que a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

Exemplo 1.6. Seja $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$. Encontre $f'(x)$.

Solução: Aplicando os processos de derivação já obitidos, segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (4x^3) + 8 \cdot 1 + 0 \\ &= 12x^3 + 8. \end{aligned}$$

Proposição 1.5 (Derivada de um Produto)**.** *Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem então, $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Sabemos que a função f é contínua e, assim, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$.

Temos: Pelo Corolário 1.1

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$, assim:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\left[g(x + \Delta x) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x + \Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.7. Seja $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$. Encontre $f'(x)$.

Solução:

$f'(x) = (2x^3 - 1) \cdot (4x^3 + 2x) + (x^4 + x^2) \cdot (6x^2)$

Proposição 1.6 (Derivada de um Quociente)**.** *Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então*

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Demonstração. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Sabemos por definição que a função é contínua e assim $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$.

Temos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \right]. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x) \cdot g(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \right] \\ &= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x)} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.8. Dado $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine $g'(x)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' \\
g'(x) &= \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} \\
g'(x) &= \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} \\
&= \frac{-1}{x^2}.
\end{aligned}$$

1.4 Derivada de Função Composta

Teorema 1.4 (Regra da cadeia.). *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}, a \in X \cap X', b \in Y \cap Y', f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Demonstração. Cosideremos uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ e ponhamos $y_n = f(x_n)$, logo $\lim y_n = b$. Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$ então $y_n \in Y - \{a\}$ e

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Portanto, se $\mathbb{N}_1$ é infinito, tem-se $\lim_{n\in\mathbb{N}_1} \dfrac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{(x_n - a)} = g^{'}(f(a)) \cdot f^{'}(a)$. Se $\mathbb{N}_2$ é infinito tem-se $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} \dfrac{[f(x_n) - f(a)]}{(x_n - a)} = 0$, logo $f^{'}(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} \dfrac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{(x_n - a)} = g^{'}(f(a)) \cdot f^{'}(a) = 0 = g^{'}(f(a)) \cdot f^{'}(a)$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{(x_n - a)} = g^{'}(f(a)) \cdot f^{'}(a),$$

o que prova o teorema. ■

Exemplo 1.9. Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$, determinar $f'(x)$.

Solução:

Reescrevendo $f(x)$, temos $f(x) = 5(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + 3)' \\
f'(x) &= 5\frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
&= \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 3}}
\end{aligned}$$

1.5 Derivadas das Funções Trigonométricas

Proposição 1.7 (Derivada da função seno)**.** *Se* $y = \operatorname{sen} x$*. Então* $y' = \cos x$*.*

Demonstração. Seja $y = \operatorname{sen} x$ Aplicando a definição 1.3, temos

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \tag{1.5}$$

Utilizando a fórmula trigonométrica $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ na equação (1.5), temos

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left[\operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2}\right] \cdot \left[\cos \frac{x + \Delta x + x}{2}\right]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\
&= 1 \cdot \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.8 (Derivada da função cosseno)**.** *Se* $y = \cos x$ *então* $y' = -\operatorname{sen} x$*.*

Demonstração. Seja $y = \cos x$. Aplicando a definição 1.3 temos,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}. \tag{1.6}$$

Utilizando a fórmula trigonométrica $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$ na equação (1.6), temos

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x+\Delta x+x}{2} \cdot \mathrm{sen}\dfrac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-2\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}\dfrac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \dfrac{\Delta x}{2}} \\
&= -2 \cdot \mathrm{sen} x \cdot \frac{1}{2} \\
&= -\mathrm{sen} x.
\end{aligned}
$$

■

Observação 1.2. As demais funções trigonométricas são definidas a partir das funções seno e cosseno, assim, para encontrar suas derivadas, basta utilizar as regras de derivação já vistas anteriormente.

Proposição 1.9 (Derivada da função tangente)**.** *Se* $y = \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\mathrm{sen} x}{\cos x}$, *então* $y' = \sec^2 x$.

Demonstração. Aplicando a proposição 1.6 obtemos,

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \mathrm{sen} x\,(-\mathrm{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.10 (Derivada da função cotangente)**.** *Se* $y = \mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen} x}$, *então,* $y' = -\,\mathrm{cosec}^2 x$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\mathrm{sen} x \cdot (-\mathrm{sen} x) - \cos x \cdot \cos x}{\mathrm{sen}^2 x} \\
&= \frac{-\mathrm{sen}^2 x - \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x} \\
&= \frac{-1}{\mathrm{sen}^2 x} \\
&= -\mathrm{cossec}^2 x.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.11 (Derivada da função secante)**.** *Se* $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$*, então*

$$y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \sec x \end{aligned}$$

■

Proposição 1.12 (Derivada da função cossecante)**.** *Se* $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$*, então*

$$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ &= -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \end{aligned}$$

■

1.6 Derivadas Sucessivas

Definição 1.5. Seja f uma função derivável definida num certo intervalo. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f; e é representada por $f''(x)$.

Exemplo 1.10. Seja $g(x) = \operatorname{tg} x$.

Solução:

$g'(x) = \sec^2 x$
$g''(x) = 2 \sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x = 2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x.$

Exemplo 1.11. Seja $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$.

Solução:

$g'(x) = 4x + 2$
$g''(x) = 4.$

Exemplo 1.12. Seja $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solução:

$h'(x) = \dfrac{1}{2}\,(x^2+1)^{\frac{-1}{2}\cdot 2x} = x\,(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}$

$h''(x) = x \cdot \frac{-1}{2}\,(x^2+1)^{\frac{-3}{2}} \cdot 2x + (x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$

Observação 1.3. A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f.

1.7 Teorema do Valor Médio de Lagrange

Teorema 1.5 (Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Ver (LIMA, 2006) ∎

Teorema 1.6 (Rolle)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f^{'}(c) = 0$*

Demonstração. Pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu valor minimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a,b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualque que seja $x \in (a,b)$. Se um desses pontos, digamos c, estiver em (a,b) então $f^{'}(c) = 0$. Ver (Teorema 1.8). ∎

Teorema 1.7 (Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f^{'}(c) = \dfrac{[f(b) - f(a)]}{(b-a)}$.*

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = \dfrac{[f(b) - f(a)]}{(b-a)}$. Observe que $g(a) = f(a) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)}\right) \cdot a$ e $g(b) = f(b) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)}\right) \cdot b$. Como $g(a) = g(b)$, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g^{'}(c) = 0$, isto é, $f^{'}(c) = d = \dfrac{[f(b) - f(a)]}{(b-a)}$. ∎

1.8 Máximos e Mínimos

Na figura 3 mostra-se o comportamento do gáfico de uma função $y = f(x)$, onde são assinalados pontos de abiscissas x_1, x_2, x_3, x_4.

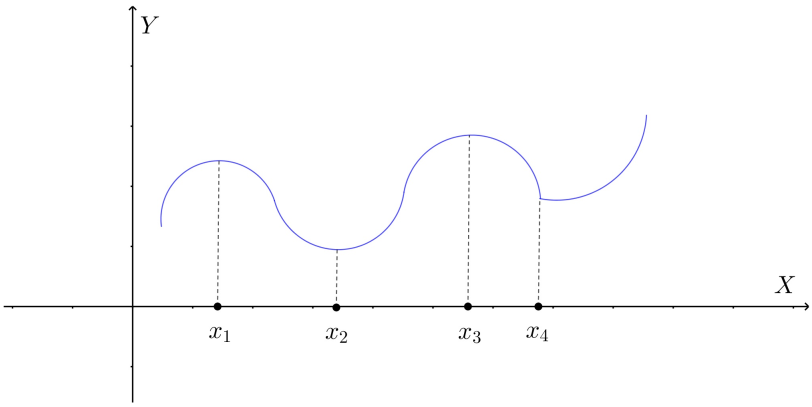

Figura 3 – Gráfico da função $y = f(x)$.

Observe que a função apresenta um comportamento irregular crescendo até determinados valores (Ponto de máximo) e depois decresce até outros (ponto de mínimo). Esses pontos são chamados pontos extremos da função. $f(x_1)$, $f(x_3)$ são chamados máximos relativos e $f(x_2)$, $f(x_4)$ mínimos relativos.

Definição 1.6 (Máximo relativo)**.** Dizemos que uma função f tem um máximo relativo (ou local) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição 1.7 (Mínimo relativo)**.** Dizemos que uma função f tem um mínimo relativo (ou local) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Observação 1.4. Uma função definida num dado intervalo pode adimitir diversos pontos extremos. O maior valor da função nesse intervalo é chamado máximo absoluto, analogamente o menor valor é chamado mínimo absoluto.

Definição 1.8 (Máximo absoluto)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto (ou global) da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Definição 1.9 (Mínimo absoluto)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto (ou global) da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Teorema 1.8. *Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe .

Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, pela definição 1.6, se x estiver suficientemente próximo de c temos que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, e então

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{1.7}$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$, e então

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{1.8}$$

Assim, por (1.7) e (1.8) concluímos que $f'(c) = 0$.

Se f tem um ponto de mínimo relativo em c, a demonstração é análoga. ■

Observação 1.5. O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado ponto crítico da função f. Uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c, é que o ponto seja crítico.

Proposição 1.13. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).*

(a) Se $f^{'}(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$;

(b) Se $f^{'}(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo Teorema 1.7, segue que

$$\exists\, c \in (x_1, x_2)\; tal\; que f^{'}(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1.9}$$

(a) Por hipótese, $f^{'}(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f^{'}(c) > 0$. Como $x_1 < x_2, x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade de (1.9), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo f é crescente em $[a, b]$.

(b) Neste caso, $f^{'}(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f^{'}(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade de (1.9), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, e assim, $f(x_2) < f(x_1)$. Logo f é decrescente em $[a, b]$.

■

Teorema 1.9 (Teste da derivada primeira para determinação de extremos)**.** *Seja f uma função continua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.*

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c;

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Demonstração.

(a) Usando a Proposição 1.13, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

(b) Pela Proposição 1.13, concluimos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo, $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um mínimo relativo em c.

■

Teorema 1.10 (Teste da derivada segunda para determinação de extremos)**.** *Seja f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:*

(a) Se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

(b) Se $f''(x) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.

Demonstração. Para provar este teorema utilizaremos o seguite resultado: "Se o $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo".

(a)

Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \tag{1.10}$$

para todo $x \in I$.

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A. Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B. Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (1.10), resulta que $f'(x) > f'(c)$. Se $x \in B$, temos que $x - c > 0$. De (1.10),resulta que $f'(x) < f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, concluimos que se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e se $x \in B$, $f'(x) < 0$. pelo critério da derivada primeira, f tem um valor máximo relativo em c. ■

A prova do item (b) é análoga.

2 Algumas Aplicações da Derivada

Esse capítulo foi baseado em (WEIR; GIORDANO, 2009).

2.1 Otimização

Otimizar alguma coisa significa minimizar ou maximizar alguns de seus aspectos. O cálculo diferencial é uma ferramenta poderosa para resolver problemas que exigem a maximização ou minimização de uma função. Nesta seção veremos algumas estratégias para resolver esses tipos de problemas.

Passos:

1. Leia atentamente o problema. Anote as informações fornecidas. Identifique a quantida desconhecida a ser otimizada.

2. Faça um desenho do problema. Indique todas as partes que possam ser importantes para o problema.

3. Represente todas as relações no desenho e no problema como uma equação ou expressão algébrica. Identifique a variável desconhecida.

4. Expresse a equação em função de uma única váriavel, quando a função é de mais de uma váriavel devemos expressar uma das variáveis em função da outra.

5. Com a função bem defina, proceda com a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

2.2 Aplicações em Geometria

Exemplo 2.1. Um retângulo tem sua base no eixo x e seus dois vértices superiores na parabola $y = 12 - x^2$. Qual a maior área que esse retângulo pode ter? Qais são suas dimensões?

Solução:

Dado $y = 12 - x^2$ temos que a área do retângulo é $A = 2xy = 2x(12 - x^2)$, onde $0 \leq x \leq \sqrt{12}$. Fazendo $A'(x) = 0$, obtemos

$$-6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \,\text{ou}\, x = -2.$$

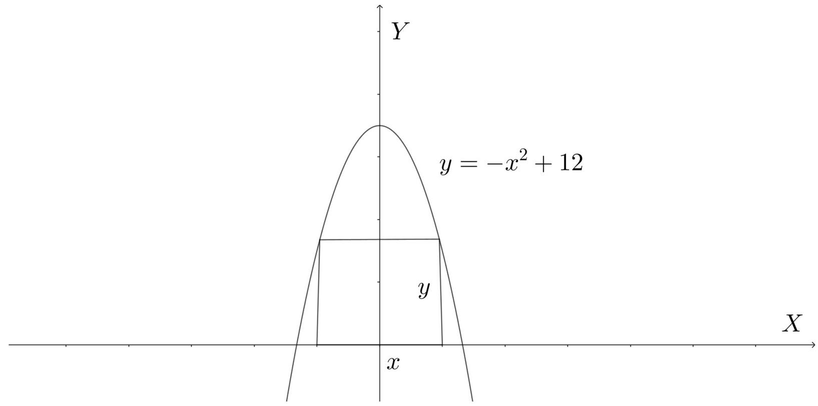

Figura 4 – Esquema do problema.

Como $x = -2$ não está no domínio, e desde que $A(0) = 0$ e $A(\sqrt{12}) = 0$, concluímos que $A(2) = 32$ unidades quadradas é a área máxima. As dimensões são 4 unidades por 8 unidades.

Exemplo 2.2 (O melhor esquema para a cerca)**.** Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?

Solução:

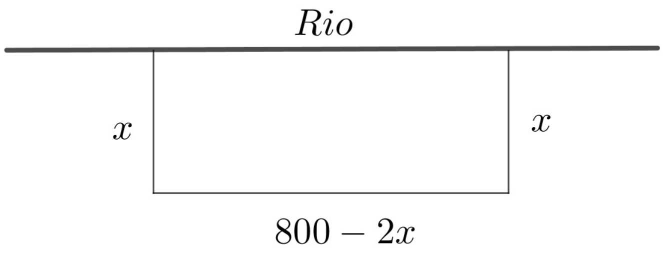

Figura 5 – Esquema do problema.

A área é $A(x) = x(800 - 2x)$, onde $0 \leq x \leq 400$. Resolvendo $A^{'}(x) = 800 - 4x = 0 \Rightarrow x = 200$. Com $A(0) = A(400) = 0$, a área máxima é $A(200) = 80,000m^2$, As dimensões são de $200m$ por $400m$.

Exemplo 2.3. Determine o volume do maior cone de revolução que pode ser inscrito em uma esfera de raio $R = 3$.

Solução:

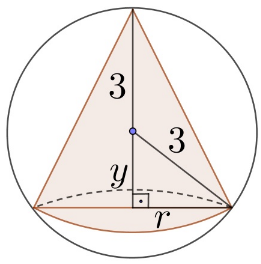

Figura 6 – Esquema do problema.

Considere o cone de revolução C, inscrito na esfera de raio 3. O volume de C é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h é a altura de C.

O volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde $r = \sqrt{9-y^2}$ e $h = y+3$, onde y é como na figura 6. Assim,

$$V(y) = \frac{\pi}{3}(9-y^2)(y+3) = \frac{\pi}{3}(27+9y-3y^2-y^3)$$

e, portanto,

$$V'(y) = \frac{\pi}{3}(9-6y-3y^2) = \pi(1-y)(3-y).$$

Os pontos críticos são -3 e 1, mas -3 não está no domínio. Como $V''(1) = \frac{\pi}{3}(-6-6(1)) < 0$, então em $y=1$ temos o volume máximo de $V(1) = \frac{\pi}{3}(8)(4) = \frac{32\pi}{3}$ unidades cúbicas.

2.3 Aplicações em Física

Exemplo 2.4. Jane está em um barco a remo a $3km$ da costa e deseja chegar a uma cidade litorânea que está a $10km$ em linha reta do ponto (na costa) mais próximo do barco. Ela rema a $3km/h$ e caminha a $8km/h$. Onde ela deve aportar para chegar a cidade no menor tempo possível?

Solução:

Dados:

Jane rema: $3km/h$

Jane caminha: $8km/h$

Objetivo minimizar a varável tempo.

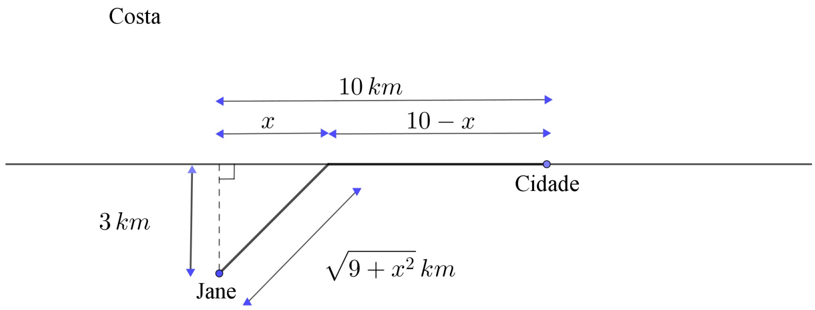

Figura 7 – Esquema do problema.

Do problema obtemos f,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{10-x}{8} \quad (0 \leq x \leq 10)\\
f(x) &= \frac{(9+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{10-x}{8}\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(9+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) - \frac{1}{8}\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3\sqrt{9+x^2}} \cdot (2x) - \frac{1}{8}\\
f'(x) &= \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} &= \frac{1}{8}\\
&\Rightarrow 8x = 3\sqrt{9+x^2}\\
&\Rightarrow 64x^2 = 9(9+x^2)\\
&\Rightarrow 55x^2 = 81\\
&\Rightarrow x = \pm\frac{9}{\sqrt{55}}.
\end{aligned}$$

Descartemos o valor negativo, pois não pertence ao domínio de f. Aplicando em f os pontos críticos, o ponto inicial e ponto final, obtemos:

$f(0) \approx 2.25km, f(\frac{9}{\sqrt{55}}) \approx 2.16km$ e $f(10) \approx 3.48km$

Jane deveria aportar seu barco na costa $\frac{9}{\sqrt{55}}km$ a partir do ponto mais próximo de seu barco.

Exemplo 2.5. Movimento vertical. A altura de um objeto que se desloca verticalmente é dada por

$$s = -4t^2 + 24t + 28$$

com s em km e t em segundos. Determine:

(a) A velocidade do objeto quando $t = 0$.

(b) Sua altura máxima e quando esta ocorre.

(c) Sua velocidade quando $s = 0$.

Solução:

(a) $s(t) = -4t^2 + 24t + 28 \Rightarrow v(t) = s^{'}(t) = -8t + 24$. Em $t = 0$, a velocidade é $v(0) = 24m/s$.

(b) A altura máxima ocorre quando $v(t) = 0$, isto é, quando $t = 3$. A altura máxima é $s(3) = 64$ metros e ocorre em $t = 3$segundos.

(c) Observe que $s(t) = -4t^2 + 24t + 28 = -4(t + 1)(t - 7)$, então $s = 0$ quando $t = -1$ ou $t = 7$. Escolhendo o valor positivo de t, como $v(t) = s'(t)$, a velocidade quando $s = 0$ é $v(7) = -32m/s$.

Exemplo 2.6. O muro de $8pés$ da figura a seguir está a $27pés$ do edificio. Determine o comprimento da viga mais curta para alcançar o edifício, apoiado no solo do lado esquerdo do muro.

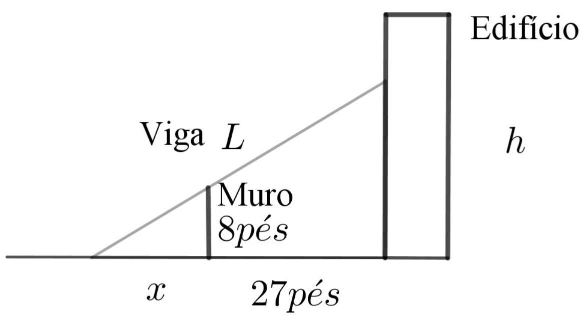

Figura 8 – Esquema do problema.

Solução:

Temos $\dfrac{8}{x} = \dfrac{h}{x+27} \Rightarrow h = 8 + \frac{216}{x}$, $L(x) = \sqrt{h^2 + (x+27)^2} = \sqrt{(8+\frac{216}{x})^2 + (x+27)^2}$, quando $x \geq 0$. Note que $L(x)$ é minimizado quando $f(x) = (8+\frac{216}{x})^2 + (x+27)^2$ é minimizado. Resolvendo $f^{'}(x) = 0 \Rightarrow f^{'}(x) = 2(8+\frac{216}{x})(-\frac{216}{x}) + 2(x+27) = 0$, obtemos

$$(x+27)\left(1 - \frac{1728}{x^3}\right) = 0 \Rightarrow x = -27 \,\text{ou}\; x = 12,$$

em $x = -27$ não é aceitável, pois a distância nunca é negativa, para $x = 12$ temos o comprimento máximo de $L(x)$. Logo, $L(12) = \sqrt{2197} \approx 46.87$ pés.

3 Um pouco de EDO

Este capítulo foi baseado em (MATOS, 2006).

Equação diferencial ordinária (abrevia-se EDO) é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas ordinárias. É notável o interesse desse ramo da matemática em praticamente todas as áreas do conhecimento humano, notadamente em Física, Economia e Engenharia, uma vez que leis e outros fundamentos teóricos dessas áreas podem ser formulados matematicamente por meio de uma equação diferêncial ordinária. De forma genérica uma EDO de 1^a ordem é uma relação do tipo:

$$F(x, y, y^{'}) = 0 \tag{3.1}$$

Onde x é a variável independente e $y = y(x)$ é uma função derivável que desejamos encontrar de modo que $F(x, y(x), y^{'}(x)) = 0$.

Vamos estudar neste trabalho apenas EDO's do tipo:

$$y^{'} + a(x)y = b(x) \tag{3.2}$$

Essas EDO's são classificadas como linear de primeira ordem; ela é linear porque é do primeiro grau nas variáveis y e $y^{'}$ e de primeira ordem porque esta é a ordem da derivada que figura na equação.

Vejamos agora o método de resolução no caso geral da equação (3.2). Primeiro multiplicamos ambos os lados da equação por uma função adequada $I(x)$, denominada fator integrante, e em seguida integramos formalmente o resultado. Assim, ao multiplicar a EDO pelo fator $I(x)$ obtemos a equação:

$$y^{'}I(x) + a(x)yI(x) = b(x)I(x)$$

O fator integrante $I(x)$ é determinado de modo que

$$\begin{aligned} y^{'}I(x) + a(x)yI(x) &= \frac{d}{dx}\left[(yI(x))\right] \Longleftrightarrow \\ y^{'}I(x) + a(x)yI(x) &= y^{'}I(x) + yI^{'}(x) \Longleftrightarrow \\ a(x)I(x) &= I^{'}(x) \end{aligned}$$

A última igualdade nos permite escolher $I(x) = exp(\int a(x)dx)$ e a EDO se reduz a

$$\frac{d}{dx}\left[y\, exp\left(\int a(x)dx\right)\right] = b(x)\, exp\left(\int a(x)dx\right).$$

Integrando esta última igualdade com respeito à variável x, encontramos:

$$y = exp\left(-\int a(x)dx\right)\left[C + \int b(x)\, exp\left(\int a(x)dx\right)dx\right], \tag{3.3}$$

onde C é uma constante arbitrária que será determinada quando for imposta à EDO uma condição inicial. A expressão (3.3) engloba todas as soluções da EDO (3.2) e, por essa razão, ela recebe o nome de solução geral da EDO (3.2).

Exemplo 3.1. Calcule a solução da EDO linear:

$$y^{'} + 2xy = 1 \tag{3.4}$$

Solução:

Obseve que a EDO já está na forma padrão (3.2) com $a(x) = 2x$ e $b(x) = 1$. O fator integrante é $I(x) = exp(\int a(x)dx) = exp(x^2)$ e a EDO é equivalente a:

$$\frac{d}{dx}(y\, exp(x^2)) = (exp(x^2))$$

e por integração encontramos a solução geral

$$y(x) = exp(-x^2)\left[C + \int exp(x^2)dx\right] \tag{3.5}$$

A integral que aparece no lado direito de (3.5) não pode ser calculada pelos métodos elementares do cálculo integral, usando série de potências, chegamos a:

$$y(x) = exp(-x^2)\left[C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right]$$

.

Exemplo 3.2. Encontre a solução geral da EDO :

$$(\operatorname{sen} x)y^{'} + (\cos x)y = \cos 2x,\ 0 < x < \pi$$

Solução:

Para colocar a EDO na forma padrão (3.3), dividimos os dois lados da equação por $\operatorname{sen} x$ e obtemos:

$$y^{'} + (\operatorname{cotg} x)y = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x},$$

onde identificamos $a(x) = \operatorname{cotg} x$ e $b(x) = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x}$. Assim, a solução geral da EDO é:

$$y(x) = exp(-\int \operatorname{cotg} x dx)\left[C + \int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x} exp(\int \operatorname{cotg} x) dx\right]$$

e usando $\ln(\operatorname{sen} x)$ como uma primitiva de $\operatorname{cotg} x$, obtemos:

$$y(x) = exp(-\ln \operatorname{sen} x)\left[C + \int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x} exp(\ln \operatorname{sen} x) dx\right]$$

ou seja:

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}(C + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x) \tag{3.6}$$

Com essa solução geral podemos encontrar, por exemplo, a solução que atende à condição $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, encontramos $C = 2$ e a solução procurada será:

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}(2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x)$$

3.1 Outras Aplicações

Exemplo 3.3. Crescimento Populacional

Neste modelo descreveremos o problema de crescimento ou decrescimento populacional. Inicialmente denotaremos por $N(t)$ o número de pessoas da população (ou a quantidade de substância) em processo de crescimento ou decrescimento, onde a variável independente t está representando o tempo. Partindo da premissa que a quantidade de indivíduos na população (ou de substância) cresce (ou decresce) a uma taxa proporcional ao tamanho da população (ou à quantidade de substância) presente, formulamos o seguinte modelo matemático para esta situação:

$$\frac{dN}{dt} = kN \; ou \; N^{'} = kN, \tag{3.7}$$

Sendo k uma constante positiva, se houver crescimento, e negativa caso contrário. Para resolver a equação (3.7) integramos formalmente ambos os lados da EDO com respeito à variável t e obtemos:

$$N(t) = N_0 \exp(kt),$$

onde $N_0 = N(0)$ representa a quantidade de substância (ou o número de habitantes) no início do processo. A quantidade N_0 denominada dado inicial e ao par constituído pela EDO (3.7) e a condição inicial $N(0) = N_0$ damos o nome de Problema de Valor Inicial e abreviamos PVI.

Exemplo 3.4. Juro Composto Continuamente

Suponhamos que R\$100 sejam investidos com juros de 2%, computados anualmente. A seguinte tabela mostra o crescimento do investimento ano após ano.

inicial	após 1 ano	após 2 anos	....	após t anos
100	100 x $(1.02) = 102$	100 x $(1.02)^2 = 104.04$	....	100 x $(1.02)^t$

Em geral, investindo uma quantidade A_0 a uma taxa anual de $k\%$, após t anos o investimento será:

$$A_0\left(1+\frac{k}{100}\right)^t \tag{3.8}$$

e se os juros compostos, por exemplo, n vezes ao ano, então em cada período de composição a taxa de juros é $k/100n$ e existem nt períodos de composição em t anos. Neste caso, o valor investido será:

$$A_0\left(1+\frac{k}{100n}\right)^{nt} \tag{3.9}$$

e a tabela a seguir mostra a evolução do investimento de R\$100, após 3 anos, com juros de 2% e com várias opções de composição.

inicial	100
composição anual	100 x $(1+\frac{2}{100})^3 = 106.12$
composição semestral	100 x $(1+\frac{2}{2\,\mathrm{x}\,100})^{2\,\mathrm{x}\,3} = 106.15$
composição trimestral	100 x $(1+\frac{2}{4\,\mathrm{x}\,100})^{4\,\mathrm{x}\,3} = 106.17$

Se em (3.9) fizermos $n \to \infty$,então os juros estão sendo computados continuamente e o investimento após t anos será:

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{k}{100n}\right)^{nt} = A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{kt/100} = A_0\exp(kt/100).$$

Derivando a última relação com respeito a t, obtemos:

$$\frac{dA}{dt} = (k/100)A,$$

de onde concluímos que, com a composição contínua de juros, o valor do investimento cresce a uma taxa $\dfrac{dA}{dt}$ proporcional ao valor investido. Os mesmos R\$100 investidos a uma taxa de 2%, computados continuamente, produz, ao final de três anos, o montante $A(3) = 100e^{(0.02)\mathrm{x}3} \approx 106.18$.

Exemplo 3.5. Variação de Temperatura

A Lei do Resfriamento de Newton estabelece que: a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Denotando por T a temperatura do corpo e por τ a temperatura do meio ambiente, a lei de Newton é formulada matematicamente pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \tau), \text{ ou } T' + kT = k\tau, \;\; k \geq 0 \tag{3.10}$$

No caso em que $T > \tau$, segue de (3.10) que $\frac{dT}{dt} < 0$ e, portanto, ocorre um processo de resfriamento.

Anexos

ANEXO A – Biografia de Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha, em 1 de julho de 1646. Seu pai era um professor luterano de filosofia moral. Leibniz desenvolveu um amplo espectro de interesses em função de seu interesse pelos livros da biblioteca de seu pai. Ele foi educado na Universidade de Leipzig e concluiu seu doutorado em Direito na Universidade de Nuremberg em 1666. Para ganhar a vida, trabalhou como advogado e diplomata a serviço da nobreza e realeza, particularmente para a Casa de Brunswick-Luneberg na Alemanha. Durante duas viagens a Londres em 1673 e 1676 Huygens e Boyle despertaram seu interesse sobre os temas matemáticos de interesse naquela época. Seu último empregador foi o Duque George Louis de Hanover que se tornou o Rei George I da Inglaterra em 1714. Seu trabalho permitiu a Leibniz viajar muito pela Europa e conhecer os estudiosos principais de seu tempo. Seus muitos deveres não interferiram com as suas extensas atividades intelectuais. Leibniz aperfeiçoou a máquina de calcular inventada por Blaise Pascal, tornando-a capaz de multiplicar e dividir; estabeleceu os fundamentos do cálculo integral e do cálculo diferencial, trabalhando independentemente de Newton; fundou a dinâmica, uma área das ciências mecânicas; trabalhou em dispositivos mecânicos como relógios, prensas hidráulicas, luminárias, submarinos, e moinhos de vento; aperfeiçoou o sistema binário de numeração usado hoje em operações de computador; inventou a teoria de que todo raciocínio pode ser reduzido a uma combinação ordenada de elementos como números, palavras, sons, ou cores (a base teórica dos computadores modernos); estabeleceu as bases para a topologia geral, um ramo da matemática; esforçou-se para formular uma base para a unificação das igrejas; e procurou elaborar uma história universal. A notação hoje utilizada no cálculo infinitesimal é basicamente devida a Leibniz. Ele também continuou aperfeiçoando seu sistema metafísico por meio da pesquisa sobre a noção de uma causa universal de todo o ser.(USP, 2018b)

Figura 9 – Gottfried Wilhelm von Leibniz Fonte: (USP, 2018b)

ANEXO B – Biografia de Isaac Newton

Isaac Newton nasceu no dia 25 de dezembro de 1642 em Woolsthorpe, Lincolnshire - no interior da Inglaterra, próximo a Cambridge. Herdou o nome de seu pai, falecido em outubro de 1642, três meses antes de seu nascimento. Newton nasceu tão prematuro que sua mãe temeu que ele não passasse daquele dia. Seu corpo miúdo caberia numa panela de um litro. Mas ao contrário das aparências, ele viveria até seus 84 anos, tempo suficiente para realizar uma das maiores produções científica de que se tem conhecimento. Embora a família de Isaac tivesse terras e criasse animais, o que fazia dos Newton uma família de razoável poder aquisitivo, seu pai não tinha educação e mal conseguia assinar o próprio nome. Newton teve uma infância simples e sofrida. Aos dois anos de idade sua mãe casou-se com um pastor e mudou-se para North Witham. Isaac foi deixado com sua avó, onde era praticamente tratado como órfão. Morou longe da mãe por um bom tempo, até os dez anos de idade quando ela ficou viúva mais uma vez e voltou para Woolsthorpe com três novos filhos. Isaac morou com seus irmãos e sua mãe por dois anos e, em seguida, sua mãe o mandou para uma escola de Gramática em Grantham. Os seus primeiros anos de escola não revelaram nenhum dom especial mas o futuro que o aguardava iria mudar completamente a sua vida. Newton formou-se na Universidade de Cambridge em janeiro de 1665 e a partir daí desenvolveu uma vida repleta de descobertas científicas que mudariam para sempre a História da Ciência. Num período de aproximadamente dois anos, Newton haveria de progredir de maneira revolucionária em Matemática, Física, Óptica e Astronomia. Em fevereiro de 1665 desenvolveu o Teorema do Binômio que proporcionou uma nova e eficaz maneira de calcular logaritmos com exatidão e trabalhar com números de muitas casas decimais. Em maio desse mesmo ano, Newton teve um insight enquanto observava o movimento de um planeta: acabara de perceber que os planetas se movem de modo que em cada ponto a direção da velocidade é a mesma que a da reta tangente à trajetória naquele ponto. Assim, várias pequenas tangentes poderiam localmente descrever o movimento dos planetas. A descoberta seguinte seria consequência das tangentes e Newton a batizou de fluxões, conhecido hoje como o Cálculo Diferencial. Newton percebeu logo em seguida que a integração de uma função era simplesmente a operação inversa da diferenciação. Essa descoberta levaria ao Cálculo Integral e está intimamente relacionada com o hoje em dia denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível a resolução de problemas de diversos tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções. Todas essas descobertas foram feitas anos antes que Leibniz, de forma independente, viesse a desenvolver o Cálculo Diferencial. Recusou-se durante muito tempo a divulgar suas descobertas e foi Leibniz quem primeiro publicou. Isto gerou uma disputa muito grande entre os dois matemáticos, sobre quem teria realmente inventado o Cálculo. Apesar de Newton ter desenvolvido antes de Leibniz a notação e a maneira de calcular derivadas, aquela que prevaleceu foi a de Leibniz que mostrou-se muito mais simples e conveniente.(USP, 2018a)

Figura 10 – Isaac Newton Fonte: (USP, 2018a)

Referências

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*. São Paulo: Pearson Educación, 2007.

LIMA, E. L. *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MATOS, M. P. *Séries e Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

USP. *Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)*. São Paulo, 2018. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/newton.htm>. Acesso em: 03 jun. 2018.

USP. *Isaac Newton, Sir (1642-1727)*. São Paulo, 2018. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>. Acesso em: 03 jun. 2018.

WEIR, J. H. M. D.; GIORDANO, F. R. *Cálculo de George B. Thomas Jr.* São Paulo: Addison Wesley, 2009.